Άσκηση: Δείξτε ότι για $x \in \mathbb{R}$, αρκετά κοντά στο 0 (ή σε μία περιοχή του 0 ή σε κάποιο $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$) υπάρχουν μοναδικές λύσεις $y(x)$ κοντά στο 0 της εξίσωσης $e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1 = 0$
[εξετάστε την $F(x,y) = e^{\sin xy} + x^2 - 2y - 1$ γύρω από το $(x_0, y_0) = (0,0)$]

Λύση:

$$F(x,y) = e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$F \in C^1(\mathbb{R}^2)$: $\nabla F(x,y) = \left(y\cos(xy)e^{\sin(xy)} + 2x,\ x\cos(xy)e^{\sin(xy)} - 2\right)$

$y(0)=0$ $F(0,0) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$

(ΘΠΣ) : $(\exists \delta > 0)(\exists \varepsilon > 0) : \forall x \in (-\delta, \delta)\ (\exists!\ y(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon))$

ώστε $F(x, y(x)) = 0$ και $y \in C^1(-\delta, \delta)$

και $y'(x) = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \xrightarrow{x=0} y'(0) = \dfrac{0}{-2} \Rightarrow \boxed{y'(0) = 0}$

16/02/16

ΘΠΣ (για διανυσματικές συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών) Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά, $\bar{F} = (F_1, \dots, F_m) : U \times V \to \mathbb{R}^m$ C^1 και $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in U \times V$ με $\bar{F}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \bar{0}$ και $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \end{pmatrix}$$

αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists \delta, \varepsilon > 0$, $\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \subset U$, $\exists! \bar{g}(\bar{x}) \in B(\bar{y}_0, \varepsilon) \subset V$ έτσι ώστε $\bar{F}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})) = \bar{0}$ και $g : B(\bar{x}_0, \delta) \to B(\bar{y}_0, \varepsilon)$ C^1, $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, g(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ αντιστρέψιμος, $\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta)$ και

$$Dg(\bar{x}) = \left(-\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, g(\bar{x}))$$

Παρατήρηση: Το προηγούμενο ΘΠΣ είναι η περίπτωση $n = m = 1$

Πώς προκύπτει ο τύπος της παραγώγου;

— Έστω $G(\bar{x}) := (\bar{x}, \underbrace{g(\bar{x})}_{\in B(\bar{y}_0, \varepsilon) \subset V \subset \mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \subset U \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(F \circ \bar{G})(\bar{x})}_{(\text{από ΘΠΣ}) = 0} = \bar{F}(\bar{G}(\bar{x})) \xrightarrow[\text{αλυσίδας}]{\text{κανόνας}} D(\bar{F} \circ \bar{G})(\bar{x}) = D\bar{F}(\bar{G}(\bar{x}))\, D\bar{G}(\bar{x})$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}}(\bar{G}(\bar{x}))\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(G(\bar{x}))\right)}_{\in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}}$$

$$= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}}(\bar{G}(\bar{x}))\, I + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{y}}(\bar{G}(\bar{x}))\, D\bar{g}(\bar{x}).$$

Άρα

$$\boxed{D\bar{g}(\bar{x}) = -\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x}))\right)^{-1} D\bar{g}(\bar{x})}$$

Άσκηση (Θέμα 7 / Φεβρ '16 / Απ 3): Έστω $W \subset U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά $\bar{f} : U \times V \to \mathbb{R}^m$, $\bar{g} : W \to V$ διαφορίσιμες. Ν.δ.ο. η $\underbrace{\bar{f}(\overbrace{\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})}^{\bar{G}(\bar{x})})}_{\bar{h}(\bar{x})}$ $\bar{x} \in W$, είναι διαφορίσιμη και βρείτε την παράγωγο.

Λύση: $W \ni \bar{x} \mapsto \bar{h}(\bar{x})$, $\bar{h} : W \to \mathbb{R}^m$

Άρα $\bar{h}(\bar{x}) = (\bar{f} \circ \bar{G}) : W \to \mathbb{R}^m$

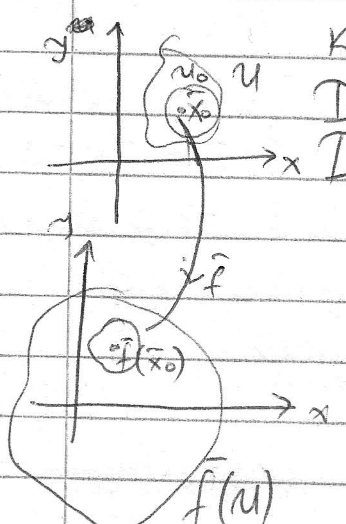
Άρα από Κανόνα Αλυσίδας: $D\bar{h}(\bar{x}) = D\bar{f}(\underbrace{\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})}_{\bar{G}(\bar{x})})\, D\bar{g}(\bar{x})$ $\begin{pmatrix} I \\ D\bar{g}(\bar{x}) \end{pmatrix}$

όπου η $\bar{G}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{g}(\bar{x}) \end{pmatrix}$ είναι διαφορίσιμη αφού κάθε συνιστώσα είναι διαφορίσιμη

(*) ΘΑΣ (Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης) (*)

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}_0 \in U$ και $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^n$ $C^1(U)$ με $D\bar{f}(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμη $\Rightarrow \exists\, U_0$ ανοικτό με $\bar{x}_0 \in U_0 \subset U$ και $V := B(\bar{f}(\bar{x}_0), \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$: $\bar{f}|_{U_0} : U_0 \to V$ είναι τοπικά 1-1 και επί και η $\bar{g} \overset{!}{=} (\bar{f}|_{U_0})^{-1} : V \to U_0$ είναι C^1 με $D\bar{f}(\bar{g}(\bar{y})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμο $\forall \bar{y} \in V$ και

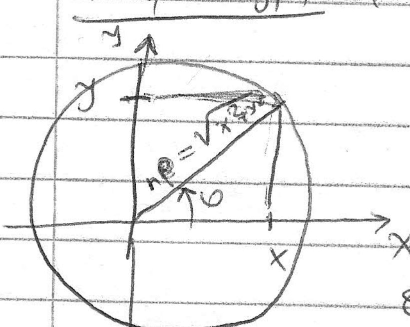
$$D\bar{g}(\bar{y}) = \left(D\bar{f}(\bar{g}(\bar{y}))\right)^{-1}$$



~~Πολικές Συντεταγμένες~~

Προσοχή!! Και το ΘΠΣ και το ΘΑΣ ισχύουν τοπικά δηλαδή για δοσμένα $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ (στο ΘΠΣ) ή $\bar{x}_0$ (στο ΘΑΣ) μπορούμε να πούμε και μόνο για $(\bar{x}, \bar{y}) \in B(\bar{x}_0, \delta) \times B(\bar{y}_0, \varepsilon)$ (στο ΘΠΣ) και $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta)$ (στο ΘΑΣ)

Παράδειγμα: (Πολικές Συν/νες)



$$\bar{f} : \underbrace{(0,+\infty)}_{r} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\varphi} \to \mathbb{R}^2, \quad \bar{f}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T = \underbrace{(x,y)}_{} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$D\bar{f}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \det D\bar{f}(r,\varphi) = r > 0 \Rightarrow$$

$\xRightarrow{\text{ΘΑΣ}}$ τοπικά γύρω από κάθε (r_0, φ_0), μπορώ να αντιστρέψω τον μετασχηματισμό από $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \xmapsto{f} (x,y)^T$

Να βρεθεί η παράγωγος της αντίστροφης f^{-1}.